УДК 519.642

К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н.С. Габбасов[1]

1 *gabbasovnazim@rambler.ru*; Набережночелнинский институт Казанского федерального университета

Исследовано линейное интегро-дифференциальное уравнение с коэффициентом, имеющим нули степенного порядка. Для его приближенного решения в пространстве обобщенных функций предложен и обоснован специальный обобщенный вариант метода коллокации.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, пространство обобщенных функций, приближенное решение, метод коллокации, теоретическое обоснование.

Работа посвящена линейному интегро-дифференциальному уравнению третьего рода (ИДУТР):

$$Ax \equiv x(t)\prod_{j=1}^{q}(t-t_j)^{m_j} + \sum_{j=0}^{p}\int_{-1}^{1} K_j(t,s)x^{(j)}(s)ds = y(t), \tag{1}$$

где $t \in I \equiv [-1,1]$, $t_j \in (-1,1)$, $m_j \in \mathrm{N}(j=\overline{1,q})$; K_j $(j=\overline{0,p})$ и y – известные "гладкие" функции, а x – искомая функция. Разработаны и обоснованы в смысле [1, гл.1] обобщенные варианты полиномиальных и сплайновых прямых методов, специально приспособленные к приближенному решению ИДУТР (1) в некотором пространстве X типа D обобщенных функций, порожденных функционалом "дельта-функция Дирака". Проведена также оптимизация по порядку точности прямых проекционных методов решения исследуемых уравнений. В виде иллюстрации приведем некоторые результаты.

Пусть $C\{m;0\}$ и $C^{(p)}$ – пространства "точечно-гладких" и гладких функций соответственно, а $T : C\{m;0\} \to C$ – "характеристический" оператор класса $C\{m;0\}$, $Y \equiv \{y \in C\{m;0\} | Ty \in C^{(p)}\}$ – пространство основных функций, а $X \equiv D^{(p)}\{m;0\}$– семейство обобщенных функций, определенных на Y (см., напр., [2]).

Далее ради простоты выкладок и формулировок будем считать в ИДУТР (1) $q=1$, $t_1 = 0$, т.е. рассмотрим уравнение вида

$$Ax \equiv t^m x(t) + \sum_{j=0}^{p}\int_{-1}^{1} K_j(t,s)x^{(j)}(s)ds = y(t) \qquad (t \in I), \tag{2}$$

где $m \in N$, $y \in Y$, ядра $K_j(j=\overline{0,p})$ удовлетворяют условиям фредгольмовости оператора $A : X \to Y$ (см. [2]).

Приближенное решение уравнения (2) будем искать в виде

$$x_n \equiv x_n(t;\{c_j\}) \equiv \left(J\left\{\sum_{i=0}^{2n-1} c_i t^i\right\}\right)(t) + \sum_{i=0}^{p-1} c_{i+2n}(t+1)^i + \sum_{i=0}^{m-1} c_{i+p+2n}\delta^{\{i\}}(t), \tag{3}$$

где $Jf \equiv ((p-1)!)^{-1} \int_{-1}^{t} (t-s)^{p-1} f(s)ds$, а δ и $\delta^{\{i\}}$ – соответственно дельта-функция Дирака и ее "тейлоровские" производные, определенные на Y (см. [2]). Набор $\{c_j\}$ неизвестных параметров найдем из СЛАУ

$$\rho_n^{\{i\}}(0) = 0, \, (T\rho_n)^{(j)}(-1) = 0, \, (DT\rho_n)(\nu_k) = 0,$$

$$(DTUx_n)'(\nu_k) = 0, \quad (i = \overline{0, m-1}, \; j = \overline{0, p-1}, \; k = \overline{1, n}), \tag{4}$$

в которой $Df \equiv f^{(p)}$, $Ux \equiv t^m x(t)$, $\rho_n(t) \equiv \rho_n^A(t) \equiv (Ax_n - y)(t)$ – невязка приближенного решения, а $\{\nu_k\}$ – система узлов Чебышева первого рода.

Относительно алгоритма (2)-(4) справедлива

Теорема. *Пусть* $Ker\, A = \{\theta\}$ *в* X, *а функции* $h_j \equiv D_t T_t K_j$ *(по* t*),* $\tau_{ji} \equiv DT\theta_{ji}$ $(j = \overline{0, p}, \, i = \overline{0, m-1})$, $DTy \in Lip\, \alpha \, (0 < \alpha \le 1)$, *где* $\theta_{ji}(t) \equiv (\eta_j)_s^{\{i\}}(t, 0) \in Y$, $\eta_j(t,s) \equiv \frac{\partial^j K_j}{\partial s^j}(t,s)$. *Тогда при всех* $n \in N$ $(n \ge n_0)$ *СЛАУ (4) имеет единственное решение* $\{c_j^*\}$ *и последовательность приближенных решений* $x_n^* \equiv x_n(t; \{c_j^*\})$ *сходится к точному решению* $x^* = A^{-1}y$ *по норме* X *со скоростью*

$$\| x_n^* - x^* \| = O(n^{-\alpha/2}).$$

При доказательстве теоремы существенно используются соответствующие идеи и результаты работ [2, 1].

Литература

1. Габдулхаев Б. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.

2. Габбасов Н. С. *Прямые методы решения интегро-дифференциальных уравнений в особом случае* // Дифференц. уравнения. – 2016. – Т. 52. – № 7. – С. 904–916.

ON NUMERICAL SOLVING FOR A CLASS OF INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

N.S. Gabbasov

We study a linear integro-differential equation with a coefficient that has zeros of finite order. For its approximate solution in the space of generalized functions, we suggest and justify a special generalized variant of the collocation method.

Keywords: integro-differential equation, space of generalized functions, approximate solution, collocation method, theoretical substantiation.